1. Innledning 2

1.1. LottoPluss 2

1.2. Joker 4

1. Innledning

Norsk Tipping (NT) skal innføre nye premier for spillet Joker. I tillegg skal det innføres et nytt spill kalt LottoPluss. I den forbindelse er NR kontaktet for å utføre sannsynlighetsvurderinger av de ulike premiene for Joker og LottoPluss.

1.1. LottoPluss.

Dette spillet er et spill som bruker Lotto-trekningen. I Lotto er det 34 kuler som er nummerert fra 1 til 34. Det trekkes (tilfeldig) 7 kuler og deretter 3 kuler (tilleggstall). Ulike kombinasjoner av de første 7 uttrukne og de 3 tilleggstallene gir ulike gevinster. I LottoPluss fokuseres det bare på de 4 første tallene fra Lotto trekningen. For å få 1.premie må spiller gjette alle de fire første tallene riktig og i tillegg gjette riktig rekkefølge/posisjon. Med riktig rekkefølge/posisjon menes her at dersom f.eks. kulen med tallet 33 blir trukket ut som andre kule må tallet 33 stå i posisjon 2. Vi tenker oss at en spiller fyller ut en rekke med fire tall i fire forskjellige bokser. Disse boksene er nummerert fra 1 til 4 og betegner rekkefølgen på tallene som trekkes ut i Lotto-trekningen. En slik utfylt rekke vil vi kalle en *spillerrekke*. Den 4-sifrede rekken som NT trekker i forbindelse med Lotto kaller vi *LottoPlussrekke*. *Spillerrekken* vil kunne tenkes å ha noen riktige tall fra *LottoPlussrekke*, mens posisjonen kan være feil. Vi definerer et *rett tall* som rett tall i riktig boks.

Oppgaven her er å finne sannsynligheten for 4 rette (1.premie), 3 rette (2.premie), 2 rette (3.premie). 1 rett og 0 rette gir ingen premie, men sannsynlighetene skal utledes.

Antall måter å lage kombinasjoner av størrelse k fra en mengde med n forskjellige elementer (repetisjoner og permutering ikke lovlig) er:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definer begivenhetene

A_j : j av tallene fra *LottoPlussrekken* er med i *spillerrekken*

C_j : j av tallene i *spillerrekken* inngår og har riktig posisjon i forhold til *LottoPlussrekken*

der $j = 0, 1, \ldots, 4$. Vi ønsker å finne sannsynligheten for C_j, men for å gjøre det har vi innført begivenheten A_j som vil gjøre dette enklere. Det følger at:

$$\Pr\{C_k\} = \sum_{j=k}^{4} \Pr\{A_j\}\Pr\{C_k|A_j\} \tag{1}$$

I den videre beregning av sannsynligheten for C_k trenger vi sannsynligheten for A_j og sannsynligheten for C_k gitt A_j, der $j = k, \ldots, 4$. La Y = antall tall fra *LottoPlussrekken* som også inngår i *spillerrekken*. Begivenheten A_j kan dermed skrives som $A_j = \{Y = j\}$. Det følger at Y er hypergeometrisk fordelt og fordelingen er gitt ved

$$\Pr\{A_j\} = \Pr\{Y = j\} = \frac{\binom{4}{j}\binom{30}{4-j}}{\binom{34}{4}} \tag{2}$$

Videre ønsker vi $\Pr\{C_k|A_j\}$, der $j \geq k$. $\Pr\{C_k|A_j\} = 0$ for $j < k$. For de mulige kombinasjonene som inngår i (1) får vi ved opptelling:

$$
\begin{aligned}
\Pr\{C_0|A_4\} &= \frac{9}{24} \\
\Pr\{C_1|A_4\} &= \frac{8}{24} \\
\Pr\{C_2|A_4\} &= \frac{6}{24} \\
\Pr\{C_3|A_4\} &= 0 \\
\Pr\{C_4|A_4\} &= \frac{1}{24} \\
\Pr\{C_0|A_3\} &= \frac{11}{24} \\
\Pr\{C_1|A_3\} &= \frac{9}{24} \\
\Pr\{C_2|A_3\} &= \frac{3}{24} \\
\Pr\{C_3|A_3\} &= \frac{1}{24} \\
\Pr\{C_0|A_2\} &= \frac{14}{24} \\
\Pr\{C_1|A_2\} &= \frac{8}{24} \\
\Pr\{C_2|A_2\} &= \frac{2}{24} \\
\Pr\{C_0|A_1\} &= \frac{3}{4} \\
\Pr\{C_1|A_1\} &= \frac{1}{4} \\
\Pr\{C_0|A_0\} &= 1
\end{aligned} \tag{3}
$$

Ved å bruke (2) og (3) i formelen i (1) kan de forskjellige sannsynligheter for $\Pr\{C_k\}$ beregnes:

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\text{1. premie i LottoPluss}\} &= \Pr\{C_4\} \\
&= 8.984532 \times 10^{-7} \\[2ex]
\Pr\{\text{2. premie i LottoPluss}\} &= \Pr\{C_3\} \\
&= 1.078144 \times 10^{-4} \\[2ex]
\Pr\{\text{3. premie i LottoPluss}\} &= \Pr\{C_2\} \\
&= 0.005018760 \\[2ex]
\Pr\{C_1\} &= 0.1072825 \\[2ex]
\Pr\{C_0\} &= 0.88759
\end{aligned}
$$

1.2. **Joker.**
Spillet endres ikke, men premieringen forandres. Førstepremie beholdes, mens andre, tredje og fjerdepremie forandres. Spillet om førstepremien foregår ved at det trekkes en spiller ut fra alle deltakende spillerkortnummere, hvor spiller er spesisfisert ved sitt spillerkortnummer som består av 9 siffer. Alle kunder har forskjellige numre. De øvrige premiene fordeles ut fra de 4 siste sifrene på spillerkortet ved at det trekkes 4 sifre fra mengden $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (ordnet utvalg med tilbakelegging). I denne sammenhengen betyr k rette at k av de 4 sifrene er rette og i riktig posisjon. 4 rette betyr at spilleren har vunnet 2.premie. For 3 og 2 rette får spiller tredje og fjerde premie henholdsvis. Vi beregner også sannsynligheten for 1 rett og 0 rette. Det er verdt å legge merke til at hvert av de 4 sifrene trekkes uavhengig av hverandre. Definer begivenhetene:

$$\begin{aligned} B_j &= \text{Spiller har riktig siffer i posisjon } j \\ B_j^C &= \text{Spiller har ikke siffer tall i posisjon } j \end{aligned}$$

der $j = 1, \ldots, 4$. Med mulige sifre fra $0, 1, \ldots, 9$ følger at $\Pr\{B_j\} = 1/10$ og $\Pr\{B_j^C\} = 9/10$ for $j = 1, \ldots, 4$. Videre utregning av sannsynlighetene for Joker-spillet gir:

$$\begin{aligned} &\Pr\{2.\text{ premie i Joker}\} \\ &= \Pr\{4 \text{ rette}\} \\ &= \Pr\{B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4\} \\ &\overset{uavh}{=} \Pr\{B_1\}^4 \\ &= (1/10)^4 \\ &= 1/10000 \\ &= 0.0001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Pr\{3.\text{ premie i Joker}\} \\ &= \Pr\{3 \text{ rette}\} \\ &= \Pr\{(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4^C) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4) \\ &\quad \cup (B_1 \cap B_2^C \cap B_3 \cap B_4) \cup (B_1^C \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4)\} \\ &\overset{disjunkt}{=} \Pr\{B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4^C\} + \Pr\{B_1 \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4\} \\ &\quad + \Pr\{B_1 \cap B_2^C \cap B_3 \cap B_4\} + \Pr\{B_1^C \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4\} \\ &\overset{uavh}{=} 4\Pr\{B_1\}^3 \Pr\{B_1^C\} \\ &= 4(1/10)^3 9/10 \\ &= 9/2500 \\ &= 0.0036 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{4.\ \text{premie i Joker}\}\\
&\quad = \quad \Pr\{2\ \text{rette}\}\\
&\quad = \quad \Pr\{(B_1 \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4^C) \cup (B_1 \cap B_2^C \cap B_3 \cap B_4^C)\\
&\qquad\quad \cup (B_1 \cap B_2^C \cap B_3^C \cap B_4) \cup (B_1^C \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4^C)\\
&\qquad\quad \cup (B_1^C \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4) \cup (B_1^C \cap B_2^C \cap B_3 \cap B_4)\}\\
&\quad \overset{disjunkt}{=} \quad 6\Pr\{B_1 \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4^C\}\\
&\quad \overset{uavh}{=} \quad 6\Pr\{B_1\}^2\Pr\{B_1^C\}^2\\
&\quad = \quad 6(\frac{1}{10})^2(\frac{9}{10})^2\\
&\quad = \quad 0.0486
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{1\ \text{rett}\}\\
&\quad = \quad \Pr\{(B_1 \cap B_2^C \cap B_3^C \cap B_4^C) \cup (B_1^C \cap B_2 \cap B_3^C \cap B_4^C)\\
&\qquad\quad \cup (B_1^C \cap B_2^C \cap B_3 \cap B_4^C) \cup (B_1^C \cap B_2^C \cap B_3^C \cap B_4)\}\\
&\quad \overset{disjunkt,uavh}{=} \quad 4\Pr\{B_1\}\Pr\{B_1^C\}^3\\
&\quad = \quad 4(\frac{1}{10})(\frac{9}{10})^3\\
&\quad = \quad 0.2916
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Pr\{0\ \text{rette}\}\\
&\quad = \quad \Pr\{B_1^C \cap B_2^C \cap B_3^C \cap B_4^C\}\\
&\quad \overset{uavh}{=} \quad \Pr\{B_1^C\}^4\\
&\quad = \quad (\frac{9}{10})^4\\
&\quad = \quad 0.6561
\end{aligned}
$$